Le 10 000ème de la liste !

Rappel de l'énigme : on écrit tous les nombres possibles avec 1 2 3 4 5 6 7 8 9, sans répétition. On les classe par ordre croissant. Questions :

1. Quel est le premier de la liste
2. Quel est le dernier
3. Quel est le 100 000ème de la liste

Vu comme ça les deux premières questions sont faciles à résoudre :

Le premier : 123 456 789

Le dernier : 987 654 321

Pour le 100 000ème cela paraît plus cher, mais d'abord cette question a-t-elle un sens, y a-t-il au moins 100 000 nombres ?

Réponse :

Il y a 9 façon de choisir le premier chiffre. Une fois celui-ci fixé il reste 8 façons de choisir le deuxième, puis 7 pour le troisième etc.

Tant et si bien qu'il y a 9x8x7x6x5x4x3x2x1 façons d'écrire un nombre de 9 chiffres. Les initiés appellent cela une permutation et le résultat de la multiplication vaut 362 880, on l'écrit aussi 9! factorielle 9.

Il y a donc plus que 100 000 nombres possibles, la question a un sens.

Il y a une façon simple mais un peu longue pour répondre à la question du 100 000ème, c'est de tous les écrire, (au moins les 100 000 premiers) et de constater sa valeur (imparable !). Il en a qui ont essayé je crois qu'ils y sont encore (avec une erreur au rang 7895, les Shadocks sont mal partis).

Plus sérieusement, et c'est là l'amorce de la solution, combien y en a-t-il qui commencent par 1 ?

Réponse :

Il y a 8 possibilités pour le 2$^{\text{ème}}$ chiffre, puis 7 pour le 3$^{\text{ème}}$, etc…

soit au total 8x7x6x5x4x3x2x1 = 8! = 40320.

On voit donc que ce n'est pas assez. Si on commence par 2, on en aura 40320 avec 1 et autant avec 2, soit en tout 80640. Ce n'est toujours pas assez. Si on va jusqu'à 3 alors on arrive à 120 960. Eureka, le 100 000ème commence par 3. Et on peut même dire plus, le 100 000ème de la grande liste devient le 100 000-80 640= le 19360$^{\text{ème}}$ dans la liste de ceux qui commencent par 3.

Il n'y a plus qu'à recommencer la méthode pour obtenir successivement et très laborieusement le résultat cherché. C'est plus rapide que la méthode Shadock mais très consommateur d'aspirine.

Heureusement il y a les calculettes, les ordinateurs (et pour ma part Excel) qui vont faire ce travail déprimant à ma place. Cela donne :

n	n!	rang	div entière	reste
9	362 880	99 999	2	19 359
8	40 320	19 359	3	4 239
7	5 040	4 239	5	639
6	720	639	5	39
5	120	39	1	15
4	24	15	2	3
3	6	3	1	1
2	2	1	1	0
1	1	0		

On divise 99 999 par 40 320 ce qui fait 2 et il reste 19359, et on continue. On divise 19 359 par 5 040 ce qui fait 3 et il reste 4239 …. Et comme ça jusqu'au bout

Ce petit programme nous dit que pour le premier chiffre il faut prendre le 2+1 c'est-à-dire le chiffre 3, c'est ce que nous avons vu plus haut, et que le suivant est le 19360ème de la liste restante (ceux qui commencent par 3). C'est compliqué je l'avoue, d'autant que ces fâcheux nombres entiers commencent à 0 et non à 1, ce qui fait que le « 100 000ème de la liste » porte le rang 99 999 dans les nombres entiers.

Ensuite il faudra prendre le 3+1=4ème de ceux qui restent. Etcetera donc

Premier chiffre, le 2+1= 3ème

1	2	3	4	5	6	7	8	9

3XX XXX XXX

Deuxième chiffre, le 3+1= 4ème de ceux qui restent =5

1	2	~~3~~	4	5	6	7	8	9

35X XXX XXX

Troisième chiffre, le 5+1= 6ème de ceux qui restent =8

1	2	~~3~~	4	~~5~~	6	7	8	9

358 XXX XXX

Quatrième chiffre, le 5+1= 6ème de ceux qui restent =9

1	2	~~3~~	4	~~5~~	6	7	~~8~~	9

358 9XX XXX

Cinquième chiffre, le 1+1= 2ème de ceux qui restent = 2

1	2	~~3~~	4	~~5~~	6	7	~~8~~	~~9~~

358 92X XXX

Sixième chiffre, le 2+1= 3ème de ceux qui restent =6

1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	6	7	~~8~~	~~9~~

358 926 XXX

Septième chiffre, le 1+1= 2ème de ceux qui restent =4

1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~

358 926 4XX

Huitième chiffre, le 1+1 = 2ème de ceux qui restent =7

1	~~2~~	~~3~~	4	~~5~~	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~

358 926 47X

Evidemment le dernier est celui qui reste ce qui fait au résultat : 358 926 471, facile, non ?

Pour vous mettre à l'aise, cette question était posée aux Olympiades des mathématiques d'il y a quelques années, Olympiades ouvertes aux élèves des premières des lycées, étonnant ! non !!

Il paraît que beaucoup ont trouvé (sans Excel et sans calculette !), petits génies va….